



# Les modèles de comportements adaptatifs appliqués à l'oligopole de Cournot

3 juillet 2006

Billand P., Bravard C.,<sup>1</sup>

## Résumé

Ce papier s'intéresse à un jeu d'oligopole "à la Cournot" récurrent, où les firmes adaptent leur quantité en imitant les meilleures stratégies présentes dans leur mémoire. Il s'agit de déterminer les états stochastiquement stables. Plusieurs approches sont présentées pour traiter cette question. Elles se distinguent par le contenu de la mémoire des firmes. Nous notons que cette mémoire joue un rôle clé dans la sélection des états stochastiquement stables. Il apparaît que l'équilibre de Cournot-Nash n'est généralement pas l'unique état stochastiquement stable, voire n'appartient pas à l'ensemble des états stochastiquement stables.

## Introduction

Le modèle du duopole de Cournot considère un marché avec deux firmes. Ces firmes produisent un bien homogène, ont des fonctions de coût identiques et se font concurrence en quantité. Chaque firme choisit son niveau de production et le prix de marché s'ajuste de façon à ce que l'offre soit égale à la demande. Une telle situation peut être modélisée sous la forme d'un jeu, dont les joueurs, les stratégies et les gains sont respectivement les firmes 1 et 2, les quantités produites  $q_1$  et  $q_2$ , et les profits  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Un équilibre, dit de Cournot-Nash, de ce jeu est un couple de quantités, noté  $(q_1^C, q_2^C)$ , qui satisfait la condition :

$$\begin{aligned} q_1^C &\in \arg \max_{q_1 \in \mathbb{R}^+} \pi_1(q_1, q_2^C) \\ q_2^C &\in \arg \max_{q_2 \in \mathbb{R}^+} \pi_2(q_1^C, q_2) \end{aligned}$$

Sous certaines hypothèses sur les fonctions de demande et de coût, un équilibre de Cournot-Nash existe et est unique (cf. Friedman, 1977). Le modèle de Cournot standard peut être étendu à des situations où il n'y a pas deux producteurs mais un ensemble composé de  $n$  producteurs,  $n \geq 3$ .

L'équilibre de Cournot-Nash peut être interprété comme un équilibre par anticipation. Plus précisément, chaque firme  $i$  a intérêt à produire la quantité  $q_i^C$  si elle s'attend à ce que

<sup>1</sup>CREUSET, Université Jean Monnet Saint-Etienne. Nous remercions Jean-Marc Tallon et Philippe Solal pour leurs suggestions qui ont largement amélioré ce papier. Toutes les erreurs qui subsistent sont bien évidemment de notre entière responsabilité.

chacune des autres firmes  $j$  produise la quantité  $q_j^C$ . Cette interprétation pose question car elle repose sur des exigences fortes concernant les informations et la rationalité des firmes (lire l'article de Ménager et Tercieux dans ce numéro).

On peut alors se demander si en présence de firmes disposant de moins d'informations et aux comportements adaptatifs, on retrouve l'équilibre de Cournot-Nash. Plus précisément, supposons qu'à une période donnée du jeu de Cournot, pour une raison quelconque, les quantités produites ne correspondent pas à l'équilibre de Cournot-Nash. Est-ce qu'il existe des processus d'adaptation des firmes qui convergent vers cet équilibre?

Il est intéressant de noter que Cournot lui-même aborde la question de la convergence vers l'équilibre de Cournot-Nash dans une situation où les firmes font preuve de comportements adaptatifs et où l'une d'entre elles dévie de la quantité de Cournot-Nash. L'auteur affirme, dans le chapitre VII de son ouvrage de 1938 consacré au duopole, que "si l'un ou l'autre des producteurs, trompé sur ses vrais intérêts, vient à s'en écarter momentanément [de l'équilibre de Cournot-Nash], il y sera ramené par une suite de réactions, toujours diminuant d'amplitude" (p. 62). De plus, en écrivant que s'il y avait 3, 4, ...,  $n$  producteurs en concurrence, toutes les circonstances restent les mêmes (p. 63), Cournot laisse à penser que le processus de convergence vers l'équilibre de Cournot-Nash ne se limite pas au cas du duopole.

Ce traitement de la convergence vers l'équilibre de Cournot-Nash a fait l'objet de plusieurs critiques. En particulier, Theocharis (1960) examine une situation d'oligopole, avec un nombre  $n$  de firmes,  $n \geq 3$ , où les firmes jouent simultanément une meilleure réponse myope, c'est-à-dire produisent à une période donnée la quantité qui maximise leur profit en supposant que les autres firmes laisseront leurs quantités inchangées relativement à la période précédente. L'auteur établit que la convergence vers le vecteur des quantités correspondant à l'équilibre de Cournot-Nash,  $(q_1^C, \dots, q_n^C)$ , n'est jamais assurée.

Des travaux récents interrogent la pertinence de l'équilibre de Cournot-Nash comme situation devant être observée sur les marchés, en se situant dans la perspective des jeux évolutionnaires. Ces travaux construisent des modèles d'oligopoles où les comportements des firmes reposent sur des capacités cognitives moins élaborées que dans le modèle de Theocharis. En fait, on peut distinguer deux types d'approches.

Le premier type (voir par exemple Qin et Stuart, 1997, Rhode et Stegeman, 2001) se situe dans un cadre biologique. Les auteurs supposent que chaque firme est programmée pour jouer une stratégie donnée, quel que soit l'état du jeu, par exemple pour produire une certaine quantité. A chaque période du jeu de Cournot, il y a un renouvellement partiel de la population des firmes. Plus une stratégie (une quantité choisie) donne des profits élevés, relativement aux profits moyens de la population, plus sa représentation dans la population des firmes nouvelles croît (en fréquence). La technique du réplicateur introduite par Maynard Smith (1972) est utilisée pour déterminer les stratégies (les quantités choisies) représentées dans la population sur le long terme.

Le second type d'approches suppose qu'à chaque période ce sont les mêmes firmes qui interagissent. De plus, ces firmes ont des comportements mimétiques. Plus précisément, les firmes disposent d'informations concernant les quantités produites précédemment et les profits associés à ces quantités. Elles comparent alors les profits réalisés afin de choisir une quantité associée au profit le plus élevé. Cette conception nous semble plus adaptée au type de situations traitées que la conception d'inspiration biologique, du fait notamment que les firmes sont dans une certaine mesure capable d'apprendre en modifiant leur comportement à partir des performances réalisées. C'est pourquoi nous nous intéressons aux travaux relevant

de ce second type d'approches.

Nous interrogeons ces travaux pour déterminer si au cours du temps les quantités produites par des firmes aux comportements imitateurs devraient converger vers les quantités de l'équilibre de Cournot-Nash. Une réponse positive permettrait de donner un autre fondement, eu égard à la rationalité supposée des firmes, à l'idée suivant laquelle c'est l'équilibre de Cournot-Nash qui devrait apparaître sur les marchés en oligopole.

En fait, les travaux examinés produisent des résultats divergents, qui dépendent de manière cruciale des informations factuelles à la disposition des firmes au cours du processus d'adaptation. Plus précisément, dans un premier type de modèles, issu de Josephson et Matros (2004), il est supposé que chaque firme se remémore les quantités qu'elle a produites, ainsi que les profits associés à ces quantités, lors de périodes passées. Elle mobilise ces informations pour décider de la quantité à produire. Nous parlerons dans ce cas de comportements d'imitation fondés sur une mémoire longue. Dans ce cadre, parmi les situations où toutes les firmes produisent une même quantité, seule la situation où cette quantité est l'équilibre de Cournot-Nash peut apparaître.

Un second type de modèles (Vega-Redondo, 1997, Possajennikov, 2003) aboutit à des résultats différents. Les auteurs supposent que chaque firme dispose d'une mémoire moins longue que dans le modèle de Josephson et Matros, puisque les firmes ont accès à des informations qui portent seulement sur la dernière période. Mais cette mémoire est plus large, puisque ces informations concernent l'ensemble des concurrents de l'industrie. Nous parlerons dans ce cas de comportements d'imitation fondés sur une mémoire large. Dans le modèle de Vega-Redondo, les informations ont trait aux quantités produites et aux profits réalisés. Dans un tel cas, l'auteur montre que ce ne sont pas les quantités associées à l'équilibre de Cournot-Nash qui devraient être produites le plus souvent, mais les quantités correspondant à l'équilibre dit de Walras. Possajennikov construit un modèle qui peut sous certaines conditions se ramener à un jeu de Cournot, dans lequel les firmes décident à la fois des capacités de production et des prix (Kreps, Scheinkman, 1983). Chaque firme connaît la capacité, le prix et le profit de chaque concurrent à la période précédente et mobilise cette information pour prendre sa décision de capacité et de prix. Possajennikov établit qu'au cours du temps un grand nombre de quantités possibles peuvent être produites par les firmes, dont les quantités correspondant à l'équilibre de Cournot-Nash et à l'équilibre de Walras.

Un troisième type de modèles (Alos-Ferrer, 2004) produit des résultats similaires à ceux de Possajennikov, à partir d'un cadre différent, qui emprunte à la fois au modèle inspiré de Josephson, Matros et au modèle de Vega-Redondo. Plus précisément, Alos-Ferrer suppose que les firmes possèdent des informations qui couvrent plusieurs périodes et qui concernent tous les concurrents de l'industrie. Ces informations portent sur les quantités produites et les profits associés à ces quantités. Nous parlerons dans ce cas de comportements d'imitation fondés sur une mémoire longue et large.

Nous examinons successivement ces trois types de modèles après avoir précisé le cadre d'analyse qui leur est commun. En conclusion, nous montrons que ce cadre peut être mobilisé dans d'autres situations en économie industrielle.

# 1 Imitation dans les modèles d'oligopole

Les travaux examinés dans ce texte s'inscrivent dans le cadre formel plus général présenté par Baron, Solal dans ce numéro.

Ce cadre est appliqué à un oligopole de Cournot standard, avec un ensemble  $N$  de firmes,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 2$ , qui produisent un bien homogène. On note  $q_i \geq 0$  la quantité individuelle et  $Q \in \mathbb{R}^+$  la quantité globale,  $Q = \sum_{i \in N} q_i$ . Chaque firme a une même fonction de coût, donnée par  $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q \mapsto C(q)$ . La fonction de demande inverse est définie par  $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $Q \mapsto P(Q)$ . Pour faciliter la présentation des résultats, nous supposons par la suite que  $C'(q) > 0$ ,  $C''(q) > 0$ , pour tout  $q \in S$  et  $P'(Q) < 0$ ,  $2P'(Q) + P''(Q) < 0$ , pour tout  $Q \in \mathbb{R}$  (cette dernière condition établit que la recette de l'industrie est une fonction strictement concave de la quantité globale). Le choix des firmes porte sur la quantité produite.<sup>2</sup> Plus précisément, chaque firme  $i \in N$  est supposée choisir une quantité appartenant à une même grille finie de quantités  $S = \{0, \delta, 2\delta, \dots, v\delta\}$ , avec  $\delta$  aussi petit que l'on veut et  $v \in \mathbb{N}$ . On fait l'hypothèse que la grille  $S$  inclut deux quantités d'équilibre jouant un rôle important dans l'analyse. La première, notée  $q^C$ , est la quantité de l'équilibre de Cournot-Nash. La seconde, notée  $q^W$ , est la quantité de l'équilibre de Walras, définie comme la quantité qui maximise le profit de la firme si cette dernière suppose donné le prix de marché. Par définition des fonctions de demande et de coût, ces deux quantités existent. L'ensemble des stratégies de chaque firme  $i \in N$  est donné par  $S$ . Un profil de stratégies est le  $n$ -uplet,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , et l'ensemble des profils de stratégies des firmes est  $S^n$ .

Le jeu de Cournot est un jeu récurrent, répété aux périodes  $t = 1, 2, \dots$ . Notons  $q_i^t \in S$  la quantité produite par la firme  $i$  à la période  $t$ . À chaque période  $t$ , chaque firme  $i$  peut décider d'une modification éventuelle de la quantité produite,  $q_i^t$ , avec une probabilité indépendamment et identiquement distribuée entre les firmes. Cette firme dispose d'un ensemble d'informations qui contient des quantités produites antérieurement et les profits associés à ces quantités. Elle prend sa décision en utilisant une règle d'imitation perturbée (cf. Baron, Solal dans ce numéro pour une définition formelle de cette notion).

Plus précisément, la règle d'imitation consiste, pour une firme  $i$  qui adapte ou révisé sa stratégie à une période donnée, à choisir une quantité appartenant à son ensemble d'information qui a généré le profit le plus important. Cette règle d'imitation est perturbée dans le sens où il existe une probabilité positive que la firme  $i$  commette une "erreur" dans l'application de cette règle de décision ou expérimente une nouvelle stratégie (dans la suite nous parlerons d'expérimentation). On suppose donc que la firme  $i$  applique correctement sa règle d'adaptation avec une probabilité  $1 - \varepsilon$  et expérimente avec une probabilité  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Dans ce dernier cas, elle choisit de manière aléatoire une quantité  $q_i \in S$ .

On note  $\mathbf{q}^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$  le vecteur des quantités produites par chaque firme  $i \in N$  à la période  $t$ . Un état à la période  $t \geq m$  est une suite  $h_m^t = (\mathbf{q}^{t-m+1}, \dots, \mathbf{q}^t)$ , où  $m$  est la taille de la mémoire des firmes. On note  $H$  l'ensemble fini des états  $h_m^t$  de longueur  $m$ .

Le processus d'imitation perturbée des firmes définit une chaîne de Markov régulière, irréductible et apériodique (cf. Baron et Solal dans ce numéro pour une définition formelle de cette notion) à laquelle est associée la paire  $(H, M^\varepsilon)$ .  $M^\varepsilon$  est la matrice des probabilités de transition, spécifiant la probabilité de transition d'un état vers un autre, lorsque la probabilité d'expérimentation de chaque firme est  $\varepsilon$ .

<sup>2</sup>Excepté dans le modèle de Possajennikov (2004) qui diffère sur ce point (cf. Section 3).

Les différents modèles d'oligopoles de Cournot examinés dans cet article identifient les états stochastiquement stables de cette dynamique d'imitation perturbée, c'est-à-dire les états au potentiel stochastique le plus faible (cf. l'article précédent pour des définitions formelles de ces notions et la description d'une procédure permettant de repérer les états stochastiquement stables). La connaissance des états stochastiquement stables permet de déterminer les vecteurs de quantités qui apparaîtront le plus souvent à long terme pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

On définit un état absorbant comme un état duquel on ne peut pas sortir sans expérimentation. Dans la suite, nous utilisons le résultat suivant lequel les états stochastiquement stables de la dynamique d'imitation perturbée sont un sous ensemble des états absorbants de la dynamique d'imitation non perturbée (cf. Baron, Solal, dans ce numéro, pour une démonstration de ce résultat).

## 2 Imitation avec mémoire longue

Dans cette section, nous adaptons le modèle de Josephson et Matros (2004) présenté par Baron et Solal dans ce numéro.

### 2.1 Cadre du modèle

On suppose que pour décider de la quantité produite pour une période donnée, une firme prend pour référence les quantités qu'elle a produites à des périodes précédentes, et les profits associés à ces quantités.

Plus précisément, à la fin de la période  $t$ , chaque firme  $i$  dispose d'une mémoire, notée  $m_i$ , de taille  $m$ , comprenant les informations sur les quantités qu'elle a produites et les profits associés à ces quantités au cours des  $m$  périodes précédentes :  $m_i^t = \{(q_i^{t-m+1}, \pi_i^{t-m+1}), \dots, (q_i^t, \pi_i^t)\}$ . Lorsqu'une entreprise révisé sa stratégie, elle n'utilise pas la totalité de sa mémoire, mais un échantillon de  $s$  couples (quantité, prix) tirés de façon aléatoire dans cette mémoire, avec  $s \leq \frac{m}{2}$ . Elle décide de produire, en  $t+1$ , la quantité à laquelle est associée le profit le plus grand dans cet échantillon. Si plusieurs quantités satisfont cette condition, l'une d'elles est choisie au hasard.

### 2.2 Les résultats

En s'inspirant de Josephson et Matros, on définit un état monomorphique comme un état dans lequel chaque producteur  $i$  produit la même quantité aux différentes périodes contenues dans sa mémoire de taille  $m$ , les quantités produites par les différentes firmes pouvant être différentes. On note  $(\mathbf{q}^{\text{Mon } a}, m)$  l'état monomorphique dans lequel la quantité est identique pour toutes les firmes et est égale à  $q^a$ . Un tel état monomorphique est dit symétrique. On note  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  l'état monomorphique symétrique où la quantité produite est  $q^C$ . Nous montrons que les états monomorphiques symétriques différents de  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  ne peuvent pas être des états stochastiquement stables. Pour établir ce résultat, nous utilisons un lemme et un théorème établis par Josephson, Matros (cf. Baron, Solal dans ce numéro).

**Lemme 1** *Dans le cadre d'une dynamique non perturbée (où les firmes n'expérimentent pas), les états absorbants, c'est-à-dire les états dont on ne peut sortir sans expérimentation, sont l'ensemble des états monomorphiques.*

A partir du lemme 1, et du fait que les états stochastiquement stables de la dynamique d'imitation perturbée sont un sous-ensemble des états absorbants de la dynamique d'imitation non perturbée, on peut affirmer que les états stochastiquement stables appartiennent à l'ensemble des états monomorphiques.

Pour énoncer le théorème ci-dessous nous devons définir la notion d'ensemble fermé sous des réponses améliorantes asynchrones (dans la suite fraa). On appelle une réponse améliorante d'une firme  $i$ , face au vecteur de quantités  $\mathbf{q} = (q_i^a, \mathbf{q}_{-i})$ , une quantité  $q_i^b \in S$  telle que  $\pi_i(q_i^b, \mathbf{q}_{-i}) \geq \pi_i(q_i^a, \mathbf{q}_{-i})$ .

**Définition 1** (adaptée de Josephson et Matros, 2004) *Un ensemble non vide de vecteurs de quantités  $\mathbf{q}$ ,  $V$ , est fraa dans le cas suivant : pour chaque vecteur de quantités,  $\mathbf{q}$ , qui n'est pas un équilibre de Nash, et pour chaque firme  $i \in N$  qui ne joue pas une meilleure réponse, si on fait jouer à cette firme une réponse améliorante, le nouveau vecteur de quantités appartiendra à  $V$ . Si  $V$  ne contient pas un autre ensemble fraa,  $V$  est appelé un ensemble fraa minimal.*

**Théorème 1** (adapté d'un théorème de Josephson et Matros, 2004, cf. Baron et Solal dans ce numéro) *Soit  $\mathbb{V}$  l'ensemble des états monomorphiques stochastiquement stables.  $V = \{\mathbf{q} \in S^n : h_m^t = (\mathbf{q}^{t-m+1}, \dots, \mathbf{q}^t) \in \mathbb{V}\}$  est un ensemble fraa minimal ou une réunion d'ensembles fraa minimaux.*

**Corollaire 1** *Les états monomorphiques symétriques autres que l'état  $(\mathbf{q}^{\text{Mon } C}, m)$  ne peuvent pas être stochastiquement stables.*

Pour démontrer ce corollaire, nous utilisons un résultat établi par Alors-Ferrer (2004, Lemmes A2 et A3).

**Lemme 2** (adapté de Alors-Ferrer, 2004) *Lorsqu'un vecteur de quantités contient seulement deux quantités différentes, dont  $q^C$ , le profit d'une firme produisant  $q^C$  est supérieur au profit de cette firme si elle produisait l'autre quantité :  $\pi_i(q_i^C, \mathbf{q}_{-i}) \geq \pi_i(q_i^a, \mathbf{q}_{-i})$ , avec  $\mathbf{q}_{-i} = (q_1^a, \dots, q_{i-1}^a, q_{i+1}^a, \dots, q_{i+k}^a, q_{i+k+1}^C, \dots, q_n^C)$ , pour tout  $q^a \in S$ .*

**Démonstration** (du corollaire 1)

On remarque en premier lieu que  $\mathbf{q}^C$  est un ensemble fraa minimal. Ainsi, si au cours de la période précédente chaque firme a produit la quantité  $q^C$ , aucune firme n'a intérêt à produire une autre quantité (les quantités des autres firmes restant inchangées). Donc le vecteur  $\mathbf{q}^C$  est un ensemble fraa. En outre, étant un singleton, si ce vecteur est un ensemble fraa, il est forcément un ensemble fraa minimal.

On montre ensuite que tous les vecteurs de type  $\mathbf{q}^a = (q_1^a, \dots, q_i^a, \dots, q_n^a)$ , différents de  $\mathbf{q}^C$ , appartiennent au même ensemble fraa que  $\mathbf{q}^C$ . Soit  $\mathbf{q}^a = (q_1^a, \dots, q_i^a, \dots, q_n^a)$  différent de  $\mathbf{q}^C$ . Il existe le processus de réponses améliorantes suivant, qui conduit de  $\mathbf{q}^a$  à  $\mathbf{q}^C$ . A tour de rôle, les firmes  $1, 2, \dots, n$  passent de  $q^a$  à  $q^C$ . La réponse  $q^C$  est à chaque fois une réponse améliorante puisque, par le lemme 2, on a  $\pi_i(q_i^C, \mathbf{q}_{-i}) \geq \pi_i(q_i^a, \mathbf{q}_{-i})$ , avec  $\mathbf{q}_{-i} = (q_1^C, \dots, q_{i-1}^C, q_{i+1}^a, \dots, q_n^a)$ . Au terme de la  $n$  nième réponse améliorante, on aboutit à  $\mathbf{q}^C$ . Il s'ensuit que tout ensemble fraa  $V$ , qui contient un vecteur de quantités  $\mathbf{q}^a = (q_1^a, \dots, q_i^a, \dots, q_n^a)$ , contient également le vecteur de quantités  $\mathbf{q}^C$ . Comme  $\mathbf{q}^C$  est un ensemble fraa,  $V$  ne peut pas être un ensemble fraa minimal. Par conséquent,  $\mathbf{q}^a$  n'appartient pas à un ensemble fraa minimal et, par le théorème 3, l'état monomorphique associé à  $\mathbf{q}^a$ ,  $(\mathbf{q}^{\text{Mon } a}, m)$ , ne peut pas être un état stochastiquement stable.  $\square$

## 2.3 Discussion

L'adaptation du modèle de Josephson et Matros au cas d'un oligopole de Cournot à  $n$  firmes permet de montrer que le seul état monomorphique candidat à la stabilité stochastique, dans lequel chaque firme produit la même quantité, est l'état dans lequel ces quantités sont celles de l'équilibre de Cournot-Nash.

Nous illustrons le processus de sélection de cet état avec un exemple simple de deux firmes, dont les fonctions de demande et de coût sont linéaires, et où chaque firme peut produire trois quantités différentes, dont la quantité de l'équilibre de Cournot, notée  $q^C$ . Plus précisément, on suppose que les 3 quantités sont  $q^C = \frac{a-c}{3b}$ ,  $q^k = \frac{a-c}{2b}$  et  $q^r = \frac{a-c}{4b}$ <sup>3</sup>; les fonctions de demande et de coût sont  $D(p) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$  et  $C(q) = cq$ , avec  $a, b, c$  des réels positifs et  $a > c$ . Les profits des firmes, pour chaque couple de quantités produites, apparaissent dans la bi-matrice ci-dessous, une fois ces profits divisés par  $\frac{(a-c)^2}{b}$ .

	$q^k$	$q^C$	$q^r$
$q^k$	0,0	$\frac{1}{12}, \frac{1}{18}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
$q^C$	$\frac{1}{18}, \frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}, \frac{9}{36}$	$\frac{5}{36}, \frac{1}{48}$
$q^r$	$\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}, \frac{1}{36}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$

Rappelons que  $(q^{\text{Mon } k}, m)$  est un état monomorphique où chaque firme produit la quantité  $q^k$ . Notons  $(q^{\text{Mon } k, r}, m)$  un état monomorphique où la première firme produit la quantité  $q^k$  et la seconde firme produit la quantité  $q^r$ .

Supposons qu'à la période  $t$ , l'état soit  $(q^{\text{Mon } k}, m)$ . On vérifie alors que si une firme  $i$  expérimente et produit la quantité  $q^C$  en  $t+1$ , elle obtient un profit plus grand qu'avant. En conséquence, il existe une probabilité positive que, au cours des  $m-1$  périodes suivantes,  $i$  révisé sa stratégie, qu'elle soit la seule à le faire, et qu'elle choisisse un échantillon qui comprenne la quantité  $q^C$ . Dans ce cas, elle décidera de produire la quantité  $q^C$  et à la période  $t+m$ , sans autres expérimentation, l'état du système sera  $(q^{\text{Mon } k, C}, m)$ . Il s'ensuit qu'une seule expérimentation suffit pour sortir de l'état  $(q^{\text{Mon } k}, m)$  et entrer dans l'état  $(q^{\text{Mon } k, C}, m)$ . On peut alors tracer un arbre dont la racine est l'état  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  et où est indiqué le nombre d'expérimentation nécessaires pour passer d'un état à un autre (les états autres que les états monomorphiques n'apparaissent pas dans l'arbre, mais on sait qu'aucune expérimentation n'est nécessaire pour passer de tels états à un état monomorphique).

On observe dans l'arbre ci-dessus qu'il faut 8 expérimentations pour atteindre l'état  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  en passant une et une seule fois par tous les états possibles. Ce nombre est forcément minimal, puisqu'il faut au moins une expérimentation pour sortir d'un état monomorphique. En outre, par définition de l'équilibre de Cournot-Nash, une expérimentation (une déviation unilatérale) n'est pas suffisante pour sortir de  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  et passer à un autre état monomorphique. Donc le nombre d'expérimentations pour atteindre n'importe quel état monomorphique, autre que l'état  $(q^{\text{Mon } C}, m)$ , en passant une et une seule fois par tous les états possibles, est au minimum de 9. Par conséquent,  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  est le seul état au potentiel stochastique minimal et il est de ce fait le seul état stochastiquement stable de la dynamique d'imitation.

<sup>3</sup>La quantité de Walras n'est pas prise en compte dans cet exemple pour simplifier la présentation des résultats. On sait que le vecteur des quantités de Walras n'est pas candidat à la stabilité stochastique.



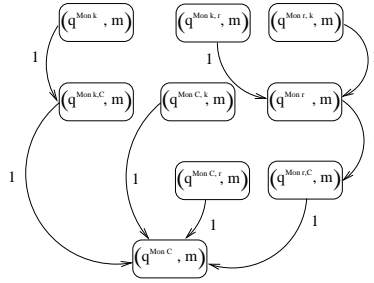


FIG. 1 – Arbre de résistance minimale, de racine  $(q^{\text{Mon } C}, m)$

Plusieurs aspects du modèle inspiré de Josephson et Matros peuvent être discutés. Premièrement, sans supposer une taille d'échantillonnage suffisamment faible,  $s \leq \frac{m}{2}$ , le résultat du modèle est remis en question<sup>4</sup>. Deuxièmement, l'hypothèse que nous avons retenue suivant laquelle, dans sa décision de production, chaque firme prend uniquement pour référence ses quantités passées, et les profits associés à ces quantités, peut être contestée. Ainsi, on peut par exemple penser que les firmes détiennent des informations sur les profits réalisés par des concurrents et qu'elles tiennent compte de ces informations pour décider de leur niveau de production. Les modèles de Vega-Redondo et de Possajennikov prennent en compte cet élément.

### 3 Imitation avec mémoire large

Vega-Redondo (1997) et Possajennikov (2003) s'appuient sur l'idée suivant laquelle, dans certains cas, l'évaluation des firmes et des managers s'effectue davantage en référence aux performances relatives qu'en référence aux performances absolues. Ce qui est alors valorisé est moins un niveau élevé de profit ou de rentabilité de l'entreprise que le fait de réaliser un profit plus important ou d'avoir un taux de rentabilité plus élevé que les concurrents. Les modèles examinés dans cette section prennent en compte cet aspect. Ils aboutissent à des résultats différents de ceux obtenus à partir du modèle de Josephson et Matros.

#### 3.1 Imitation avec mémoire large dans un jeu de Cournot

Ce cas est traité dans un modèle de Vega-Redondo (1997).

##### 3.1.1 Cadre du modèle

Lorsqu'une firme  $i$  révisé sa stratégie à une période donnée, on suppose qu'elle dispose des informations concernant les quantités produites et les profits associés à ces quantités de toutes les firmes à la période précédente. La firme  $i$  choisit alors, parmi toutes les quantités produites par les firmes à la période précédente, celle ayant généré le plus grand profit, et ce avec une probabilité  $1 - \varepsilon$ . S'il existe plusieurs quantités différentes ayant généré le profit

<sup>4</sup>En fait, même l'hypothèse de l'échantillonnage mérite d'être fondée (le fait de ne mobiliser que certains éléments tirés au hasard dans la mémoire).



le plus élevé, la firme  $i$  choisit au hasard l'une d'elles. Avec une probabilité  $\varepsilon$ , la firme  $i$  expérimente une nouvelle stratégie, en choisissant de façon aléatoire une quantité  $q_i \in S$ .

### 3.1.2 Les résultats

Vega-Redondo définit un état monomorphique comme une situation dans laquelle toutes les firmes produisent une quantité identique à une période donnée. On note  $\mathbf{q}^{\text{Mon } a}$  un tel état, où la quantité produite est  $q^a$ . L'auteur fait tout d'abord remarquer que, dans le cas de la dynamique d'imitation décrite ci-dessus, mais non perturbée, seuls les états monomorphiques sont des états absorbants (la démonstration est évidente et donc omise). Par conséquent, seuls ces états sont candidats à la stabilité stochastique. Vega-Redondo établit ensuite que, parmi les états monomorphiques, seul l'équilibre walrasien est stochastiquement stable.

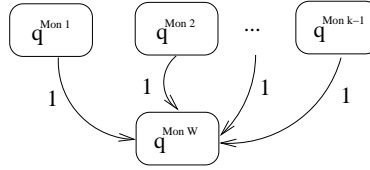


FIG. 2 – Arbre de résistance minimale, de racine  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$

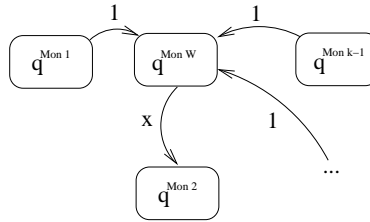


FIG. 3 – Arbre de résistance minimale, de racine  $\mathbf{q}^{\text{Mon } 2}$

**Proposition 1** (Vega-Redondo, 1997) *Dans le cas de la dynamique perturbée seul l'équilibre walrasien est stochastiquement stable.*

**Démonstration** Formellement, l'équilibre walrasien correspond à la quantité, notée  $q^W$ , qui réalise :

$$P(nq^W)q^W - C(q^W) \geq P(nq^W)q - C(q), \forall q \geq 0$$

On montre tout d'abord que pour tout  $q$  différent de  $q^W$  et  $1 \leq j \leq n$ , on a :

$$P((n-j)q + jq^W)q^W - C(q^W) > P((n-j)q + jq^W)q - C(q) \quad (1)$$

En effet, comme  $P'(Q) < 0$ ,  $P(nq^W) - P((n-j)q + jq^W)$  a le même signe que  $q - q^W$ . Par conséquent,  $[P(nq^W) - P((n-j)q + jq^W)](q - q^W) > 0$ , pour tout  $q \neq q^W$ , ce qui équivaut à :

$$P((n-j)q + jq^W)(q - q^W) < P(nq^W)(q - q^W)$$

En ajoutant  $C(q^W) - C(q)$  aux deux membres de l'inéquation ci-dessus et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} & [P((n-j)q + jq^W)q - C(q)] - [P((n-j)q + jq^W)q^W - C(q^W)] \\ & < \\ & [P(nq^W)q - C(q)] - [P(nq^W)q^W - C(q^W)] \end{aligned}$$

Par définition de l'équilibre walrasien, l'expression de droite de l'inéquation n'est pas positive. Donc l'expression de gauche est négative, ce que l'on voulait montrer.

A partir de ce résultat, on établit que l'état monomorphique  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ , dans lequel chaque entreprise produit la quantité  $q^W$ , est le seul état stochastiquement stable. On procède en deux temps.

1. Tout d'abord, supposons que l'état initial soit un état monomorphique différent de  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ . On montre qu'une expérimentation suffit pour passer à l'état  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  de la façon suivante. Une firme  $i$  expérimente pour produire la quantité  $q^W$ , les autres firmes ne changeant pas. A partir de l'inéquation 2 (en écrivant  $j = 1$ ), on observe que le profit de  $i$  est plus important que le profit des autres firmes. Par conséquent, cette firme sera imitée et on observe, toujours à partir de l'inéquation 2, que sans autre expérimentation, il existe une probabilité positive de passer à l'état  $q^W$  (quel que soit le nombre de firmes produisant  $q^W$ , le profit de ces firmes est plus élevé que le profit des firmes produisant l'autre quantité). Il apparaît donc que le nombre d'expérimentations pour passer de n'importe quel état monomorphique à l'état  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  est égal à 1 et est donc minimal. On peut alors conclure que le potentiel stochastique de  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  est minimal.
2. Ensuite, on montre que le potentiel stochastique de tous les autres états monomorphiques est supérieur à celui de  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ . Ainsi, supposons que l'état initial est  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  et qu'une firme  $i$  expérimente une nouvelle quantité  $q \neq q^W$ . A partir de l'inéquation 2, en posant  $j = n - 1$ , on observe que le profit de  $i$  est moins important que le profit des autres firmes. Il s'ensuit que cette expérimentation ne sera pas imitée et la firme  $i$  retournera à  $q^W$ . En conséquence, une seule expérimentation ne suffit pas pour passer de l'état  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  à un autre état monomorphique. Il en résulte que le potentiel stochastique des états autres que  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  est plus élevé que le potentiel stochastique de ce dernier. Pour illustrer ce résultat, on choisit un exemple où chaque firme peut produire  $k$  quantités possibles. Il est possible de construire un arbre dont la racine est  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  et pour lequel  $k - 1$  expérimentations permettent d'atteindre l'état  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$  en passant une et une seule fois par tous les états possibles (cf. Figure 2, où sont indiqués les états et le nombre d'expérimentations pour passer d'un état à un autre). Pour n'importe quel autre arbre, dont la racine est différente de  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ , au moins  $k$  expérimentations sont nécessaires pour atteindre cet état, en passant une et une seule fois par tous les états possibles. Ce résultat est illustré dans la figure 3 pour l'arbre de racine  $\mathbf{q}^{\text{Mon } 2}$ . Sans perte de généralité, on suppose que le nombre minimal d'expérimentations est obtenu en supprimant le lien qui relie  $\mathbf{q}^{\text{Mon } 2}$  à  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ , dans l'arbre de racine  $\mathbf{q}^{\text{Mon } W}$ , pour le remplacer par un lien qui

relie  $q^{\text{Mon } W}$  à  $q^{\text{Mon } 2}$ . Dans ce cas, le nombre d'expérimentations pour passer de  $q^{\text{Mon } W}$  à  $q^{\text{Mon } 2}$  est  $x \geq 2$  et le nombre d'expérimentations qui permet d'atteindre l'état  $q^{\text{Mon } 2}$  en passant une et une seule fois par tous les états possibles est au moins égal à  $k$ .  $\square$

### 3.1.3 Discussion

On sait que, par définition de l'équilibre de Cournot-Nash, pour tout  $q \neq q^C$ , on a :

$$P((n-1)q^C + q)q - C(q) < P(nq^C)q^C - C(q^C),$$

c'est-à-dire que si une firme dévie de  $q^C$ , elle fait baisser son propre profit. L'imitation de cette firme peut alors apparaître comme un comportement contre-intuitif. En fait, on observe que si une firme  $i$  expérimente pour produire une quantité autre que  $q^C$ , par exemple pour produire  $q^W$ , son propre profit diminue certes, mais le profit des autres firmes diminue davantage. Au final, le profit de la firme  $i$ , qui a expérimenté, est supérieur au profit des entreprises qui n'ont pas changé leur quantité. On peut alors comprendre que la firme  $i$  soit imitée. En outre, supposons que toutes les firmes produisent la quantité  $q^W$ , et qu'une firme  $i$  expérimente en produisant une quantité apportant un profit plus important face au vecteur de quantités  $(q_1^W, \dots, q_{i-1}^W, q_{i+1}^W, \dots, q_n^W)$ , par exemple  $q_i = q^C$ . Alors, à partir de l'inéquation 2, on observe que la firme  $i$  fait augmenter son profit, mais le profit des autres firmes s'accroît davantage. Au final, le profit de la firme  $i$ , qui a expérimenté, est inférieur au profit des entreprises qui n'ont pas changé leur quantité. Ceci explique que la firme  $i$  ne soit pas imitée par les autres firmes et qu'elle revienne à la quantité initiale  $q^W$ .

Vega-Redondo établit donc que même sur un marché comprenant un petit nombre de firmes qui se font concurrence en quantités, ces dernières peuvent se comporter comme si elles étaient en situation de concurrence pure et parfaite. Le résultat est différent de celui obtenu à partir du modèle de Josephson et Matros, puisque dans ce dernier modèle, un état dans lequel à une période donnée chaque firme produit la quantité de Walras ne peut pas être un état stochastiquement stable.

On remarque que la règle d'imitation de Vega-Redondo conduit à une situation très satisfaisante du point de vue du surplus global, défini comme la somme du surplus des firmes et du surplus des consommateurs. Plus précisément, la mise sur le marché des quantités walrasiennes est un comportement inefficace du point de vue des firmes (en particulier les profits sont moindres que dans le cas de l'équilibre de Cournot-Nash), mais intéressant pour les consommateurs et le bien-être social, car on sait que ce dernier est maximal à l'équilibre walrasien.

Tout comme Vega-Redondo, Possajennikov (2003) construit un modèle où les firmes imitent les comportements qui ont produit les meilleures performances à la période précédente. Cependant, les résultats obtenus diffèrent sensiblement du fait du cadre adopté.

## 3.2 Imitation avec mémoire large dans un jeu à deux étapes

Le modèle de Cournot a beaucoup été critiqué au motif que sur les marchés les firmes décident des prix et non des quantités. Cependant, avant d'entrer en concurrence à une période donnée, les producteurs peuvent avoir pris des décisions qui les engagent dans le

temps. Ces décisions concernent par exemple la capacité de production et donc la quantité maximale produite. Dans ce dernier cas, la situation de marché peut être représentée comme un jeu à deux étapes, où à la première étape les firmes décident simultanément des capacités de production et à la deuxième étape les firmes décident simultanément des prix. Kreps et Scheinkman (1983) montrent que, sous certaines conditions peu contraignantes, les capacités de production permettant de produire les quantités de l'équilibre de Cournot-Nash, et le prix associé à ces quantités, correspondent à un équilibre parfait en sous-jeu du jeu à deux étapes.

Possajennikov (2003) fait jouer ce jeu à deux étapes, de manière récurrente, à des firmes aux comportements adaptatifs basés sur l'imitation.

### 3.2.1 Cadre du modèle

Dans le modèle de Possajennikov, la stratégie d'une firme  $i \in N$  à la période  $t$  est décrite par le choix d'une capacité de production et du prix de vente pour cette période<sup>5</sup>. L'auteur suppose que la quantité produite par chaque firme est égale à la capacité de production de cette firme et peut être différente de la demande adressée à cette firme (ci-dessous,  $q_i$  désigne à la fois la capacité de production et la quantité produite par la firme  $i$ ). En outre, chaque firme  $i$  est supposée choisir sa quantité (ou capacité de production),  $q_i$ , et son prix,  $p_i$ , dans les mêmes grilles finies, respectivement  $S = \{0, \delta, 2\delta, \dots, v\delta\}$  et  $R = \{0, \gamma, 2\gamma, \dots, \kappa\gamma\}$ , avec  $\delta$  et  $\gamma$  des réels aussi petits que l'on veut,  $v \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}$ . On suppose que ces grilles comprennent les quantités et les prix associés aux équilibres de Cournot-Nash,  $(q^C, p^C)$ , et de Walras,  $(q^W, p^W)$  respectivement. La stratégie d'une firme  $i$  à la période  $t$  est notée  $(q_i^t, p_i^t)$ , avec  $(q_i^t, p_i^t) \in S \times R$ .

Possajennikov utilise le même processus d'imitation que Vega-Redondo. Plus précisément, lorsqu'une firme révisé sa stratégie elle choisit, parmi toutes les stratégies  $(q, p)$  jouées à la période précédente, la stratégie (ou une des stratégies) qui a procuré le profit le plus important en moyenne. L'état du jeu à la période  $t$  est donné par :  $h_1^t = ((q_1^t, p_1^t), (q_2^t, p_2^t), \dots, (q_n^t, p_n^t))$ .

### 3.2.2 Les résultats

On définit un état monomorphique comme une situation où toutes les firmes ont la même capacité de production (produisent la même quantité) et fixent le même prix. On note  $(q^{\text{Mon } a}, p^{\text{Mon } b})$  un tel état où la capacité et le prix sont  $q^a$  et  $p^b$ . Les états absorbants de la dynamique d'imitation non perturbée sont l'ensemble des états monomorphiques (la démonstration est triviale et n'est pas indiquée). Les états stochastiquement stables sont donc un sous-ensemble des états monomorphiques

<sup>5</sup>La justification de cette hypothèse est la suivante. La stratégie de la firme  $i$  à la période  $t$  dans le cas du jeu à deux étapes peut s'écrire :  $s_i^t = (q_i^t, p_i(0, 0), \dots, p_i(v\delta, v\delta))$ , où  $p_i(x, y)$  est le choix du prix si les capacités des firmes  $i$  et  $j$  sont respectivement  $x$  et  $y$ . Lorsque le jeu a été joué, la firme  $i$  n'observe pas toute la stratégie de  $j$  mais uniquement le prix fixé par  $j$  pour le couple de quantités  $(q_i^t, q_j^t)$ . L'auteur fait l'hypothèse que lorsque la firme  $i$  imite la firme  $j$  à la période  $t + 1$ , elle remplace les quantités et tous les prix conditionnels par la quantité et le prix de  $j$  en  $t$  :  $s_i^{t+1} = (q_j^t, p_j^t, \dots, p_j^t)$ . Si c'est la firme  $j$  qui imite, on aura :  $s_j^{t+1} = (q_i^t, p_i^t, \dots, p_i^t)$ . C'est pourquoi, au terme d'un certain nombre de répétitions du jeu, la stratégie d'une firme  $i$  peut être décrite complètement par le couple  $(q_i, p_i)$ .

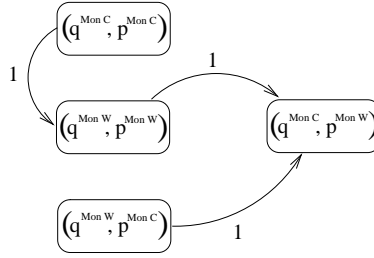


FIG. 4 – Arbres de résistance minimale, de racine  $(q^{\text{Mon } C}, p^{\text{Mon } W})$

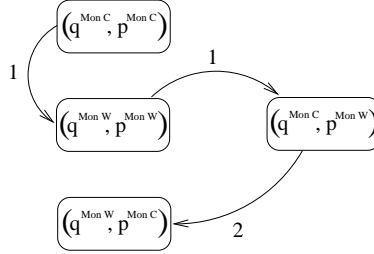


FIG. 5 – Arbres de résistance minimale, de racine  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } C})$

**Proposition 2** (*Possajennikov, 2003*) *Tous les états stochastiquement stables comprennent des quantités produites par les firmes comprises entre  $q^C$  et  $q^W$ .*

La preuve est assez longue (voir Possajennikov, 2003, Appendice A, pp. 301-304). On peut illustrer le résultat obtenu à partir de l'exemple suivant donné par l'auteur. Soient deux firmes ayant les mêmes fonctions de coût et produisant un bien homogène. Les fonctions de demande et de coût sont linéaires, de la forme :  $D(p) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}p$ ,  $C(q) = cq$ , avec  $a, b, c$  positifs et  $a > c$ . Chaque firme dispose de 4 stratégies :  $(q^C, p^C)$ ,  $(q^W, p^W)$ ,  $(q^C, p^W)$ ,  $(q^W, p^C)$ , où  $q^C$  ( $q^W$ ) est la quantité de l'équilibre de Cournot-Nash (walrasien),  $p^C$  ( $p^W$ ) le prix d'équilibre associé à cette quantité. Le tableau ci-dessous représente la bi-matrice des profits des firmes dans les différents cas possibles, une fois ces profits divisés par  $\frac{a-c}{18b}$ .

	$(q^C, p^C)$	$(q^C, p^W)$	$(q^W, p^C)$	$(q^W, p^W)$
$(q^C, p^C)$	$2a - 2c, 2a - 2c$	$2a - 2c, 0$	$2a - 2c, 2a - 5c$	$a - 4c, 0$
$(q^C, p^W)$	$0, 2a - 2c$	$0, 0$	$0, 2a - 5c$	$0, 0$
$(q^W, p^C)$	$2a - 5c, 2a - 2c$	$2a - 5c, 0$	$2a - 5c, 2a - 5c$	$a - 7c, 0$
$(q^W, p^W)$	$0, a - 4c$	$0, 0$	$0, a - 7c$	$0, 0$

On sait que seuls les états monomorphiques, donc les états de la diagonale de la bi-matrice, sont candidats à la stabilité stochastique. On vérifie que, si  $a \leq 4c$ , une expérimentation est suffisante pour sortir de n'importe quel état monomorphique et aller vers un autre état monomorphique. En particulier, on observe qu'une expérimentation suffit pour passer de l'état  $(q^{\text{Mon } C}, p^{\text{Mon } C})$  à l'état  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } W})$ . En effet, si initialement les deux firmes jouent  $(q^C, p^C)$  et que l'une d'elles expérimente pour jouer  $(q^W, p^W)$ , alors le pro-

fit de cette firme baisse mais moins que le profit de la firme qui continue à jouer  $(q^C, p^C)$ . Donc l'expérimentation sera imitée. En outre, on peut vérifier qu'une expérimentation suffit pour passer de l'état  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } W})$  à l'état  $(q^{\text{Mon } C}, p^{\text{Mon } W})$ , ainsi que de ce dernier état à l'état  $(q^{\text{Mon } C}, p^{\text{Mon } C})$ . Enfin, on peut également vérifier que s'il est possible de sortir de l'état  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } C})$  en une expérimentation, il n'est pas possible de joindre ce dernier état en une expérimentation à partir d'un autre état monomorphique. En fait, la construction d'arbres dont les racines sont les 3 états monomorphiques différents de  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } C})$  montre que pour chacun d'entre eux il faut 3 expérimentations au minimum pour atteindre la racine correspondant à un de ces 3 états en passant une et une seule fois par tous les états possibles. Ce résultat est illustré dans la figure 4 pour l'arbre de racine  $(q^{\text{Mon } C}, p^{\text{Mon } W})$ . Concernant l'arbre dont la racine est  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } C})$ , la figure 5 montre qu'il faut 4 expérimentations pour atteindre cette racine. Il s'ensuit que les 3 états monomorphiques autres que  $(q^{\text{Mon } W}, p^{\text{Mon } C})$  sont stochastiquement stable.

### 3.2.3 Discussion

Les résultats du modèle montrent qu'à partir d'un même critère de décision, à savoir pour une firme  $i$  la comparaison de ses propres profits avec ceux de chacun de ces concurrents à la période précédente, les quantités des états stochastiquement stables peuvent être très différentes. Ainsi, contrairement au modèle de Vega-Redondo, dans le modèle de Possajennikov l'équilibre de Cournot est stochastiquement stable. Quant à l'équilibre walrasien, il n'est pas toujours stochastiquement stable et, quand il l'est, c'est parmi un ensemble de quantités.

Deux critiques peuvent être adressées au modèle de Possajennikov. La première concerne la plausibilité de certains équilibres stochastiquement stables. Dans l'exemple donné par l'auteur et repris ci-dessus, ainsi que dans le cas plus général, il existe des états stochastiquement stables  $(q^{\text{Mon } a}, p^{\text{Mon } b})$  où  $q^a \neq \frac{D(p^b)}{2}$ , c'est-à-dire des états où la capacité de production, et la quantité produite, est différente de la quantité demandée. Or, supposons un tel état, où la capacité de production (la quantité produite) d'une firme  $i$  est supérieure à la demande qui lui est adressée. Le cadre hypothétique adopté ne permet pas à la firme de prendre conscience du fait que si elle diminue sa capacité de production (et ne modifie pas son prix), elle va faire baisser ses coûts et augmenter son profit.

La deuxième critique vaut également pour le modèle de Vega-Redondo. Dans ces deux modèles, avant de prendre sa décision à la fin d'une période pour la période suivante, une firme prend en compte uniquement les profits réalisés au cours de cette période. Or, lorsqu'une firme a changé sa production et s'interroge sur le bien-fondé de ce changement une fois ce dernier effectué, il est supposé qu'elle est parfaitement insensible à la variation de son propre profit suite au changement, même lorsque cette variation de profit est substantielle. Le modèle suivant, de Alos-Ferrer, prend en considération cette critique.

## 4 Imitation avec mémoire longue et large

Alos-Ferrer (2004) construit un modèle qui emprunte des éléments à la fois au modèle inspiré de Josephson, Matros et au modèle de Vega-Redondo.

## 4.1 Cadre du modèle

Alos-Ferrer suppose que chaque firme  $i \in N$  prend sa décision de production pour la période  $t + 1$ ,  $q_i^{t+1} \in S$ , à partir des profits réalisés par elle-même et ses concurrents, non seulement à la période précédente, mais également au cours de périodes antérieures. Plus précisément, à la fin de la période  $t$ , chaque firme  $i$  dispose d'une mémoire identique, de taille  $m$ , de la forme :

$$m_i^t = \left\{ \left( (q_1^{t-m+1}, \pi_1^{t-m+1}), \dots, (q_i^{t-m+1}, \pi_i^{t-m+1}), \dots, (q_n^{t-m+1}, \pi_n^{t-m+1}) \right), \dots, \left( (q_1^t, \pi_1^t), \dots, (q_i^t, \pi_i^t), \dots, (q_n^t, \pi_n^t) \right) \right\},$$

avec  $\pi_i^t$  le profit réalisé par la firme  $i$  à la période  $t$ .

On observe que chaque firme dispose à la fois d'une mémoire plus longue que dans le modèle de Vega-Redondo et de Possajennikov, puisque cette mémoire comprend plusieurs périodes, et d'une mémoire plus large que dans le modèle inspiré de Josephson et Matros, puisque cette mémoire contient des informations concernant l'ensemble des concurrents de l'industrie.

Chaque firme choisit un niveau de production auquel correspond le profit le plus grand dans sa mémoire, avec une probabilité  $1 - \varepsilon$ . Avec une probabilité  $\varepsilon$ , la firme expérimente en choisissant au hasard une quantité  $q \in S$ .

## 4.2 Les résultats

Alos-Ferrer définit un état monomorphique comme une situation dans laquelle les firmes ont toutes produit la même quantité au cours des périodes prises en compte dans la mémoire. On note  $(q^{\text{Mon } a}, m)$  un tel état, où la quantité est  $q^a$  et où  $m$  est la taille de la mémoire. L'auteur aboutit à un résultat qualitativement semblable à celui de Possajennikov.

**Proposition 3** (Alos-Ferrer, 2004) *Les états stochastiquement stables sont les états monomorphiques dont les quantités appartiennent à l'ensemble  $\{q^C, q^C + \delta, \dots, q^W - \delta, q^W\}$ .*

Tout d'abord, de la même façon que dans les modèles précédents, on peut montrer qu'un état stochastiquement stable appartient au sous-ensemble des états monomorphiques. Nous donnons l'intuition de la preuve concernant la définition des états stochastiquement stables à l'intérieur de ce sous-ensemble (pour la preuve complète, voir Alos-Ferrer, pp 209-216). Notons  $M(q, q_i)$  la différence de profit de la firme  $i$ , dans la situation où cette firme produit la quantité  $q_i$  alors que toutes les autres produisent la quantité  $q$ , et dans la situation où la firme  $i$  produit la même quantité que les autres firmes, la quantité  $q_i = q$  :

$$M(q, q_i) = P((n-1)q + q_i)q_i - C(q_i) - P(nq)q + C(q)$$

Notons  $D(q, q_i)$  la différence entre le profit de la firme  $i$  qui produit la quantité  $q_i$ , alors que toutes les autres firmes produisent la quantité  $q$ , et le profit d'une firme produisant la quantité  $q$  :

$$D(q, q_i) = P((n-1)q + q_i)q_i - C(q_i) - P((n-1)q + q_i)q + C(q)$$

Pour donner l'intuition du fait que les seuls états stochastiquement stables sont les états  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ , avec  $q^C \leq q^a \leq q^W$ , on s'appuie sur le graphique suivant.



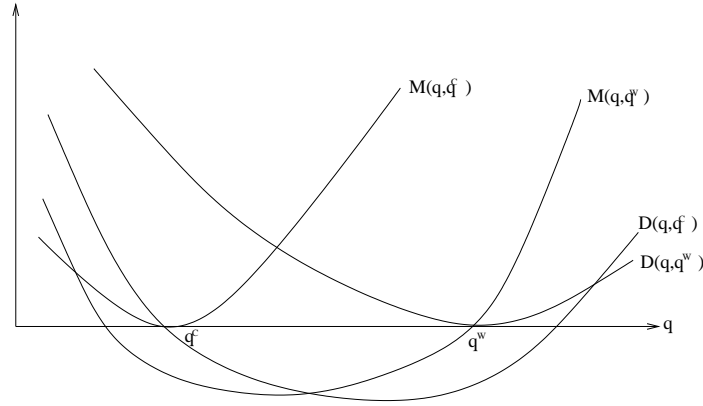


FIG. 6 – Variations de profit de la firme qui expérimente

La forme des courbes du graphique découlent des propriétés de la fonction de demande et de la fonction de coût. On sait également que l'on a  $M(q, q^C) \geq 0$ ,  $D(q, q^W) \geq 0$  et  $M(q, q^C) = 0$  pour  $q = q^C$ ,  $D(q, q^W) = 0$ , pour  $q = q^W$ .

On montre tout d'abord que les états stochastiquement stables  $(q^{\text{Mon } a}, m)$  ne peuvent pas être des états tels que  $q^a < q^C$  ou  $q^a > q^W$ . Soit une situation initiale où toutes les firmes produisent la quantité  $q < q^C$ . Supposons qu'une firme  $i$  expérimente et produise la quantité  $q^C$ . Cette firme fait plus de profit qu'auparavant, puisque  $M(q, q^C) > 0$  pour tout  $q < q^C$ . De plus, elle fait plus de profit que les autres firmes ( $D(q, q^C) > 0$  pour tout  $q < q^C$ ). Par conséquent, aux périodes suivantes, et en l'absence d'expérimentation, la firme  $i$  va continuer à produire la quantité  $q^C$  et les autres firmes vont imiter la firme  $i$ . De la même façon, on observe que lorsque toutes les firmes produisent  $q > q^W$ , si une firme expérimente et produit la quantité  $q^W$ , alors cette firme sera imitée.

En outre, le graphique ci-dessus permet de comprendre que lorsque toutes les firmes produisent une quantité comprise entre  $q^C$  et  $q^W$ , une seule expérimentation ne suffit plus pour quitter un état monomorphique. Ainsi, dans une telle situation, si une firme expérimente en produisant une quantité supérieure, par exemple  $q^W$ , on observe sur le graphique que son profit sera certes supérieur à celui des autres firmes, mais ce profit sera moins important qu'auparavant. Donc l'expérimentation ne sera pas imitée. De même, si une firme expérimente en produisant une quantité inférieure, par exemple  $q^C$ , on observe que son profit sera certes supérieur à ce qu'il était précédemment mais le nouveau profit des autres firmes sera encore supérieur à ce dernier. Donc l'expérimentation ne sera pas imitée. En résumé, si  $q^a < q^C$  ou  $q^a > q^W$ , une expérimentation suffit pour sortir de l'état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$  alors que, si  $q^C \leq q^a \leq q^W$ , une expérimentation ne suffit pas pour sortir de l'état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ . Alos-Ferrer utilise ce résultat, suivant lequel il est plus facile d'atteindre un état dont les quantités appartiennent à l'intervalle  $[q^C, q^W]$  à partir d'un état dont les quantités sont situées hors de cet intervalle que de réaliser l'opération inverse, pour montrer que seuls les états monomorphiques dont les quantités appartiennent à l'intervalle  $[q^C, q^W]$  peuvent être stochastiquement stables.

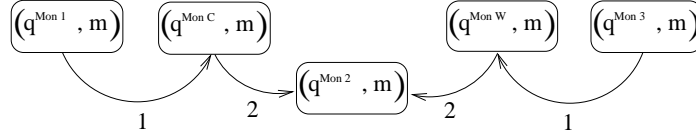


FIG. 7 – Arbres de résistance minimale, de racine  $(q^{\text{Mon } 2}, m)$

L'auteur montre ensuite pourquoi l'ensemble de ces derniers états sont stochastiquement stables. L'argument essentiel est qu'il est possible de déstabiliser n'importe quel état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$  avec seulement deux expérimentations et que le nouvel état monomorphique atteint est  $(q^{\text{Mon } b}, m)$ , avec  $q^b$  qui peut être supérieure ou inférieure à  $q^a$ . On illustre cet argument en examinant une situation de duopole.<sup>6</sup>

Considérons n'importe quel état monomorphique  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ , avec  $q^C < q^a < q^W$ . On a montré qu'une seule expérimentation ne peut suffire pour déstabiliser un tel état. Par contre, deux expérimentations suffisent. Ainsi, supposons que les deux firmes, notées 1 et 2, expérimentent et produisent  $q_1 = q^a - \delta$ ,  $q_2 = q^a + \delta$ . La quantité globale étant la même, le prix du produit reste constant. On sait que pour un prix donné, la fonction de profit est concave et atteint son maximum en  $q^W$ . Par conséquent, le profit de la firme 2, qui produit désormais  $q_2 = q^a + \delta$ , a augmenté et est supérieur à celui de la firme 1, qui produit désormais  $q_1 = q^a - \delta$ . Son comportement sera donc imité et on peut atteindre l'état  $(q^{\text{Mon } b}, m)$ , avec  $q^b = q^a + \delta$ . En outre supposons que, à partir de l'état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ , les deux firmes expérimentent pour produire la même quantité  $q^d = q^a - \delta$ . Le profit de chaque firme augmente, du fait des hypothèses sur les fonctions de coût et de demande, et c'est la quantité  $q^d$  qui sera produite aux périodes suivantes (sans nouvelles expérimentations). Le nouvel état sera  $q^{\text{Mon } d}$ . En conséquence, à partir d'un état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ , avec  $q^C < q^a < q^W$ , deux expérimentations suffisent pour passer soit à un état  $(q^{\text{Mon } b}, m)$ , avec  $q^b = q^a + \delta$ , soit à un état  $q^{\text{Mon } d}$ , avec  $q^d = q^a - \delta$ . On peut également montrer que deux expérimentations suffisent pour quitter  $(q^{\text{Mon } C}, m)$  et  $(q^{\text{Mon } W}, m)$  et passer à un état  $(q^{\text{Mon } a}, m)$ , avec  $q^C < q^a < q^W$ .

Ce résultat de Alos-Ferrer est illustré dans la figure ci-dessous où la grille des quantités contient 5 éléments, trois qui appartiennent à l'intervalle  $[q^C, q^W]$ , les quantités  $q^C$ ,  $q^2$ ,  $q^W$ , et 2 quantités situées en dehors de cet intervalle, les quantités  $q^1$  et  $q^3$ . On observe sur la figure 7 que pour l'arbre dont la racine comprend une quantité située à l'intérieur de l'intervalle  $[q^C, q^W]$ , il faut 6 expérimentations pour atteindre cet état en passant une et une seule fois par tous les états possibles. Alors que pour l'arbre dont la racine comprend une quantité située en dehors de l'intervalle  $[q^C, q^W]$ , 7 expérimentations sont nécessaires pour atteindre cet état en passant une et une seule fois par tous les états possibles (figure 8).

<sup>6</sup>La démonstration dans le cas plus général est assez longue et complexe (cf Alos-Ferrer, 2004, pp. 212-216). Elle repose sur le fait que, quel que soit l'état monomorphique  $q^{\text{Mon } a}$  tel que  $q^C \leq q^a \leq q^W$ , deux expérimentations suffisent pour déstabiliser cet état.

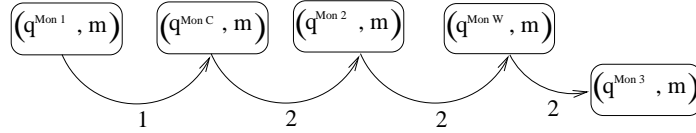


FIG. 8 – Arbres de résistance minimale, de racine  $(q^{\text{Mon } 3}, m)$

### 4.3 Discussion

Dans le modèle de Alos-Ferrer, deux effets interagissent qui tirent les quantités des états stochastiquement stables dans deux directions opposées. Le premier effet, pris en compte dans le modèle de Vega-Redondo (1997), concerne les performances relatives des firmes, le fait de devoir faire mieux que les autres, qui oriente vers l'équilibre walrasien. Le second effet, pris en compte dans le modèle inspiré de Josephson et Matros (2004), est un effet de réponse améliorante, le fait de faire mieux qu'auparavant, qui oriente vers l'équilibre de Cournot-Nash.

La règle d'imitation conçue par l'auteur pose un certain nombre de questions. Par exemple, supposons qu'à une période donnée,  $\bar{t}$ , une stratégie donne un profit très élevé et que dans les périodes suivantes cette même stratégie procure des profits très faibles, plus faibles que d'autres stratégies utilisées par d'autres firmes. Alors, tant que la période  $\bar{t}$  se trouve dans la mémoire des firmes, c'est cette stratégie qui est supposée être imitée.

En outre, le modèle de Alos-Ferrer a une capacité prédictive très imprécise sur les quantités qui devraient être produites par les firmes. L'auteur établit certes que les états monomorphiques, pour lesquels les quantités produites sont à la fois inférieures à l'équilibre de Cournot-Nash et supérieures à l'équilibre walrasien, ne sont pas stochastiquement stables. Cependant, une fois ces états exclus, il reste un grand nombre d'états qui sont stochastiquement stables, et les quantités qui peuvent être produites par les firmes au cours du temps sont donc très variables.

## 5 Conclusion et extensions

Il s'avère difficile de retrouver la solution de Cournot-Nash dans les modèles de comportements adaptatifs fondés sur l'imitation. Ainsi, dans trois des modèles examinés, soit cette issue n'apparaît pas (modèle de Vega-Redondo), soit cette issue apparaît mais n'est pas unique (modèles de Alos-Ferrer et de Possajennikov). Notons que dans le modèle inspiré de Josephson et Matros, le résultat de Cournot est le seul vecteur de quantités symétriques associé à un état candidat à la stabilité stochastique.

Du point de vue de l'économie industrielle, les approches examinées présentent l'intérêt de mettre en évidence l'émergence d'autres quantités que celles de Cournot, comme quantités pouvant être souvent produites par les firmes au cours du temps. Ces approches permettent également de montrer que les quantités qui seront le plus souvent produites sont sensibles à la règle d'adaptation suivie, notamment aux informations factuelles disponibles et utilisées par les firmes pour prendre leurs décisions. On peut cependant noter que dans toutes les approches, l'intervalle des quantités stochastiquement stables est restreint. Plus précisément, aucune quantité en dehors de l'intervalle des quantités de Walras et de Cournot ne peut

être stochastiquement stable. Ces deux dernières quantités constituent donc des référents centraux.

La notion de stabilité stochastique peut être étendue à d'autres situations d'oligopole (51) et le résultat de Vega-Redondo peut être généralisé à d'autres situations d'économie industrielle (52).

## 5.1 Application de la notion de stabilité stochastique à d'autres situations d'oligopoles

La recherche des états stochastiquement stables dans des situations où les firmes ont des comportements adaptatifs fondés sur l'imitation a été réalisée dans des situations d'oligopole différentes de celle des modèles de Cournot standard. Ainsi, Alos-Ferrer, Ania et Schenk-Hoppé (2000) considèrent une situation de concurrence en prix à la Bertrand. Ils montrent que dans le cas où le modèle de Bertrand standard prédit un profit nul à l'équilibre, leur modèle prédit que dans le long terme, les firmes font des profits positifs. Tanaka (2001) s'intéresse à une situation de concurrence à la Bertrand et à la Cournot, avec des firmes asymétriques quant aux fonctions de coûts et aux produits fabriqués. L'auteur montre que l'état stochastiquement stable dans l'oligopole à la Bertrand coïncide avec l'état stochastiquement stable dans l'oligopole à la Cournot. Tous ces travaux, d'une part témoignent de l'applicabilité de la notion de stabilité stochastique à l'étude de situations variées d'oligopole, d'autre part confirment la sensibilité des résultats obtenus à la situation modélisée.

## 5.2 Généralisation des résultats de Vega-Redondo à des jeux sous-modulaires

Rappelons que Vega-Redondo a établi que dans un jeu d'oligopole à la Cournot standard les comportements d'imitation des firmes, fondés sur les profits réalisés par les firmes à la période précédente, conduisent à la quantité de l'équilibre walrasien. Schipper (2003) reprend la notion de sous-modularité, développée par Topkis (1979) et Vives (1999), et généralise le modèle de Vega-Redondo. L'auteur utilise le fait que le jeu de Cournot joué dans ce modèle est un jeu agrégé quasi sous-modulaire.

Un jeu agrégé est un jeu où le résultat de chaque joueur  $i$  dépend de deux variables : la stratégie de  $i$  et l'agrégation des stratégies jouées par tous les joueurs, y compris éventuellement le joueur  $i$ . Le jeu de Cournot est un jeu agrégé puisque le profit de chaque firme  $i$  dépend de la quantité produite par  $i$  et de la quantité globale produite par l'ensemble des firmes.

Nous définissons formellement un jeu agrégé symétrique quasi sous-modulaire dans le contexte d'un jeu de Cournot. Un jeu agrégé symétrique est quasi sous-modulaire si pour  $(q_i, Q) \in S \times \mathbb{R}$ ,  $(q'_i, Q') \in S \times \mathbb{R}$ , nous avons pour tout joueur  $i \in N$  :

$$\begin{aligned}
 \pi_i(\max\{q_i, q'_i\}, \max\{Q, Q'\}) &\geq \pi_i(q'_i, Q') \\
 &\Rightarrow \\
 \pi_i(q_i, Q) &\geq \pi_i(\min\{q_i, q'_i\}, \min\{Q, Q'\}), \\
 \pi_i(\min\{q_i, q'_i\}, \min\{Q, Q'\}) &\geq \pi_i(q'_i, Q') \\
 &\Rightarrow \\
 \pi_i(q_i, Q) &\geq \pi_i(\max\{q_i, q'_i\}, \max\{Q, Q'\})
 \end{aligned} \tag{2}$$

Dans le contexte d'un oligopole de Cournot, la condition 2 implique que l'intérêt pour la firme  $i$  de choisir une quantité élevée diminue lorsque la quantité totale produite augmente. Schipper montre que les jeux agrégés quasi sous-modulaires admettent un unique état stochastiquement stable sous le processus d'imitation défini par Vega-Redondo. Cet état correspond à une situation où chaque joueur  $i$  maximise sa fonction de paiement en considérant l'agrégation des stratégies jouées par tous les joueurs (y compris celle jouée par le joueur  $i$ ) comme une donnée. Schipper remarque que plusieurs situations économiques, autres que l'oligopole de Cournot homogène, constituent des jeux agrégés quasi sous-modulaires. Ainsi, l'oligopole de Cournot avec biens différenciés et substituables, l'exploitation d'une ressource commune, ou la recherche de rente constituent des jeux agrégés quasi sous-modulaires.

## Bibliographie

- [1] Alos-Ferrer C., 2004, Cournot versus Walras in dynamic oligopolies with memory, *International Journal of Industrial Organization*, 22, 193-217.
- [2] Alos-Ferrer C., Ania A.B., Shenk-Hoppé K.R., 2000, An evolutionary model of Bertrand oligopoly, *Games and Economic Behavior*, 33, 1-19.
- [3] Binmore K., 1987, Modeling rational players, *Economics and Philosophy*, 2, 9-55.
- [4] Cournot A.A., 1838, *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Hachette (Edition 1980, Librairie Vrin).
- [5] Friedman J., 1977, *Oligopoly and the theory of games*, North-Holland.
- [6] Josephson J., Matros A., 2004, Stochastic imitation in finite games, *Games and Economic Behavior*, 49, 244-259.
- [7] Kreps D., Scheinkman J., 1983, Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes, *Bell Journal of Economics*, 14, 326-337.
- [8] Maynard Smith J., 1972, *On evolution*, Edimbourg University Press.
- [9] Qin C.Z., Stuart C., 1997, Bertrand versus Cournot revisited, *Economic Theory*, 10, 497 - 507.
- [10] Rhode P., Stegeman M., 2001, Non-Nash equilibria of darwinian dynamics with applications to duopoly, *International Journal of Industrial Organization*, 19, 415-453.
- [11] Schipper B.C., 2004, Submodularity and the evolution of walrasian behavior, *International Journal of Game Theory*, 4, 471-477.
- [12] Possajennikov A., 2003, Imitation dynamic and Nash equilibrium in Cournot oligopoly with capacities, *International Game Theory Review*, 32, 291-305.
- [13] Tanaka Y., 2001, Evolution to equilibrium in an asymmetric oligopoly with differentiated goods, *International Journal of Industrial Organization*, 19, 1423-1440.
- [13] Theocharis R.D., 1960, On the stability of the Cournot solution on the oligopoly problem, *Review of Economic Studies*, 73, 133-134.
- [14] Topkis D.M., 1979, Equilibrium points in nonzero-sum  $n$ -person submodular games, *SIAM Journal Control and Optimization*, 17(6), 773-787.
- [15] Vega-Redondo F., 1997, The evolution of walrasian behavior, *Econometrica*, 65, 375-384.
- [16] Vives X., *Oligopoly Pricing. Old ideas and new tools*, The MIT Press, 1999.
- [17] Young H.P., 1993, The evolution of conventions, *Econometrica*, 61, 57-84.